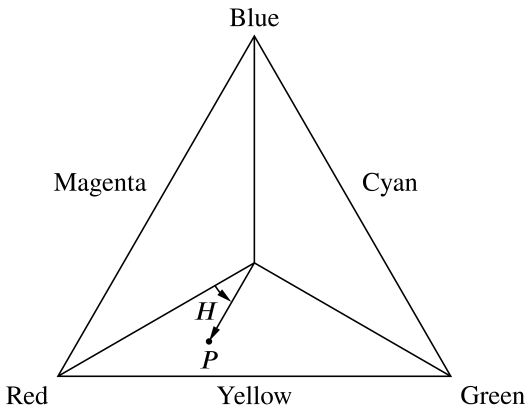
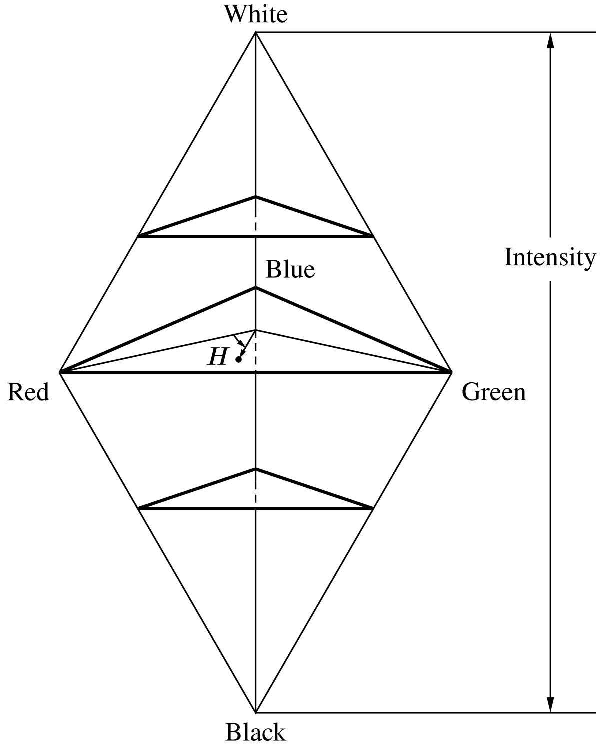
1 从 RGB 到 HSI 的转换

RGB 模型是根据单位立方体定义的. 然而, HSI 模型的颜色分量 (色相和饱和度) 是根据图 1(a) 所示的颜色三角形来定义的. 在图 1(a) 中, 注意到色点 P 的色调 H 是所示矢量相对于红原色轴的角度. 因此, 当 $H = 0°$ 时, 颜色为红色. 当 H 为 $60°$ 时, 颜色为黄色, 以此类推. 色点 P 的饱和度 S 是颜色未被白色稀释的程度, 与 P 到三角形中心的距离成正比. P 距离三角形中心越远, 它的颜色越饱和.

在 HSI 模型中, 强度是根据一条垂直于三角形并通过其中心的线来测量的. 沿着三角形下面这条线的强度趋于从暗到黑. 相反, 在三角形以上的强度则从亮到白.



(a)



(b)

图 1 (a) 三角形 HSI 颜色模型; (b)HSI 颜色锥体.

在三维色彩空间中结合色相、饱和度和强度可以得到图 1(b) 所示的三面金字塔状结构. 这个结构表面的任何一点都代表了一种纯饱和的颜色. 该颜色的色调取决于它相对于红原色轴的角度, 其强度取决于它与黑色点的垂直距离 (也就是说, 与黑色的距离越大, 该颜色的强度越大). 类似的结论也适用于结构内部的点, 唯一的区别是颜色在接近垂直轴时变得不那么饱和.

HSI 模型中的颜色是根据归一化后的红色、绿色和蓝色值定义的, 以 RGB 原色给出[1]

$$r = \frac{R}{R+G+B}, \tag{1}$$

$$g = \frac{G}{R+G+B}, \tag{2}$$

$$b = \frac{B}{R+G+B}, \tag{3}$$

故 $r, g, b \in [0, 1]$, 且

$$r + g + b = 1\,. \tag{4}$$

[1] 参考 Gonzalez and Woods, Digital Image Processing, 1st ed. Addison-Wesley, 1992.

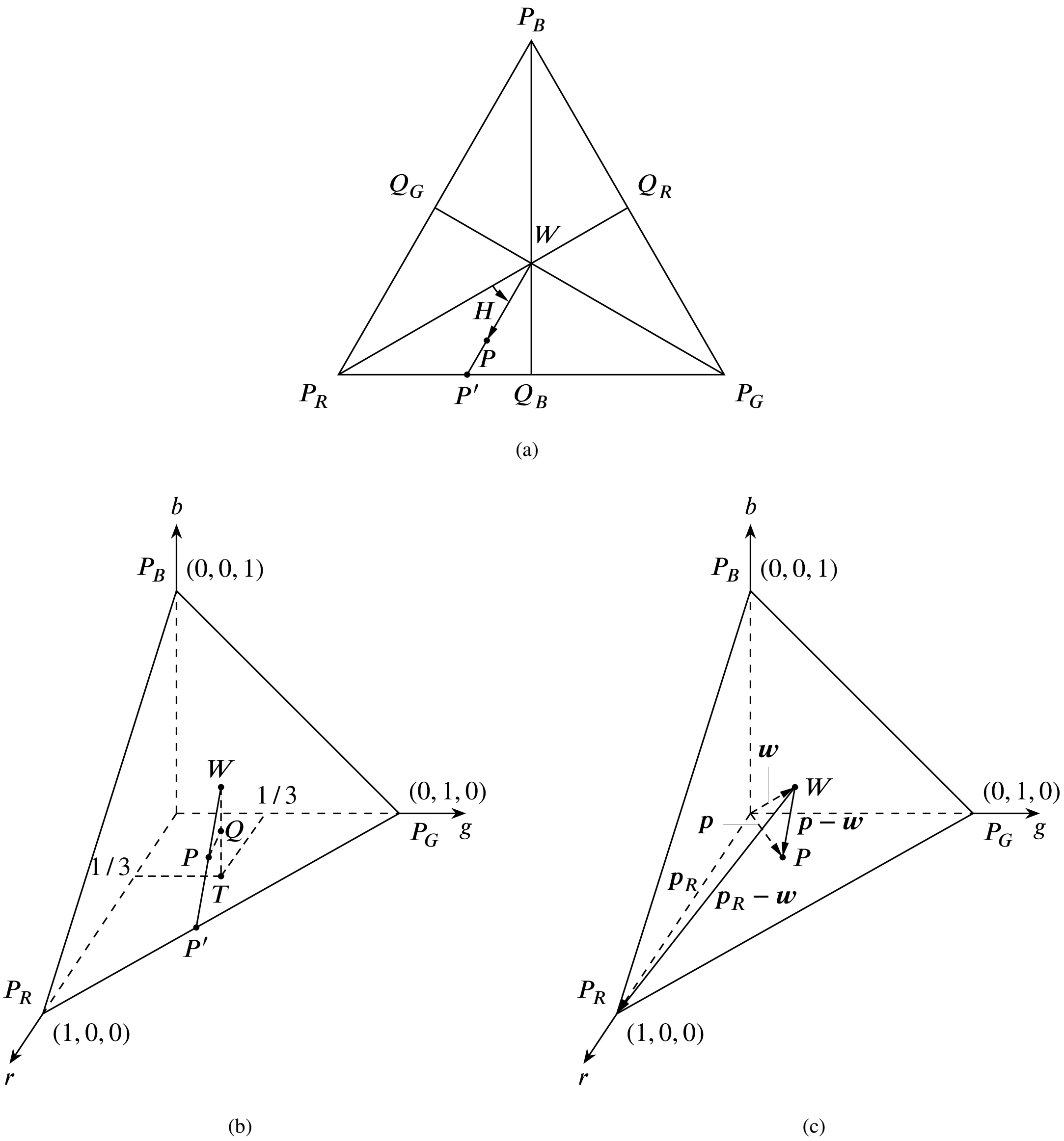


图 2　HSI 颜色空间与 RGB 颜色空间的几何关系

注意, 虽然 R, G 和 B 能同时达到最大值, 但归一化值仍满足式(4). 事实上, 这个方程的平面包含了 HSI 三角形.

对于任意的 R, G 和 B 分量, 每一个在范围 $[0,1]$ 内, HSI 的强度分量定义为

$$I = \frac{1}{3}(R+G+B), \tag{5}$$

其值在 $[0,1]$ 范围内.

下一步是获得 H 和 S 分量, 为了从图 2 的几何约束中得到 H, 我们作如下条件说明:

(a) 点 W 的坐标为 $(1/3, 1/3, 1/3)$;

(b) 任一点 P 的坐标为 (r, g, b), 且被约束在以 $\triangle P_R P_G P_B$ 为边界的平面内;

(c) 从原点到 W 的向量记为 $\boldsymbol{w}$. 类似地, 从原点到点 P_R 和 P 的向量分别记为 $\boldsymbol{p}_R$ 和 $\boldsymbol{p}$;

(d) 直线 $P_iQ_i, i = R, G, B$, 交于点 W;

(e) 令 $r_0 = R/I, g_0 = G/I, b_0 = B/I$, 其中 I 在式(5)中给出, 从图 2(a) 可以看出, P_RQ_R 是点 (r_0, g_0, b_0) 满足 $g_0 = b_0$ 的轨迹. 同理, 沿着 P_BQ_B 有 $r_0 = g_0$, 沿着 P_GQ_G 有 $r_0 = b_0$;

(f) 在以 $\triangle P_RQ_RP_G$ 为边界的平面区域内, 任意点都满足 $g_0 \geqslant b_0$. 在 $\triangle P_RQ_RP_B$ 区域范围内的任意

点都满足 $b_0 \geqslant g_0$. 因此, 直线 P_RQ_R 将 $g_0 > b_0$ 的区域与 $g_0 < b_0$ 的区域分开. 同理, 直线 P_GQ_G 将 $b_0 > r_0$ 的区域与 $b_0 < r_0$ 的区域分开, 直线 P_BQ_B 将 $g_0 > r_0$ 的区域与 $g_0 < r_0$ 的区域分开;

(g) 对于 $i = R, G$ 或 B, $\left|WQ_i\right| / \left|P_iQ_i\right| = 1/3$ 且 $\left|WP_i\right| / \left|P_iQ_i\right| = 2/3$ ($|\cdot|$ 代表长度);

(h) RG 扇区定义为以 $\triangle WP_RP_G$ 为边界的区域, GB 扇区定义为以 $\triangle WP_GP_B$ 为边界的区域, BR 扇区定义为以 $\triangle WP_BP_R$ 为边界的区域.

在图 2(a) 中, 任意颜色的色调由线段 WP_R 与 WP 之间的夹角定义, 矢量形式如图 2(b) 所示, 由向量 $\boldsymbol{p}_R - \boldsymbol{w}$ 与向量 $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}$ 之间的夹角定义. 例如, $H = 0°$ 对应红色, $H = 120°$ 对应绿色, 以此类推. 尽管角 H 可以通过任意经过 W 的线来测量, 但以红原色轴来测量色调是一种惯例. 一般来说, 下式适用于 $0° \leqslant H \leqslant 180°$:

$$(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{p}_R - \boldsymbol{w}) = \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}\| \, \|\boldsymbol{p}_R - \boldsymbol{w}\| \cos H \,, \tag{6}$$

其中 $(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \cos H$ 表示两个向量的点积或内积, $||\cdot||$ 表示向量的范数 (模).

根据条件(a)和(b),

$$\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}\| = \left[\left(r - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(g - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2\right]^{1/2} , \tag{7}$$

代入式(1)-(3), 得

$$\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}\| = \left[\frac{9\left(R^2 + G^2 + B^2\right) - 3(R + G + B)^2}{9(R + G + B)^2}\right]^{1/2} . \tag{8}$$

由于向量 $\boldsymbol{p}_R$ 和 $\boldsymbol{w}$ 各自从原点延伸到点 $(1, 0, 0)$ 和 $(1/3, 1/3, 1/3)$, 故

$$\|\boldsymbol{p}_R - \boldsymbol{w}\| = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} , \tag{9}$$

故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{p}_R - \boldsymbol{w}) &= \frac{2}{3}\left(r - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(g - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(b - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2R - G - B}{3(R + G + B)} .\end{aligned} \tag{10}$$

从式(6)得

$$H = \cos^{-1}\left[\frac{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{p}_R - \boldsymbol{w})}{\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{w}\| \, \|\boldsymbol{p}_R - \boldsymbol{w}\|}\right] , \tag{11}$$

代入(8)-(10), 得

$$H = \cos^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}[(R - G) + (R - B)]}{\left[(R - G)^2 + (R - B)(G - B)\right]^{1/2}}\right\} , \tag{12}$$

此式适用于 $0° \leqslant H \leqslant 180°$. 如果 $b_0 > g_0$, 则 H 大于 $180°$, 此时, 令 $H = 360° - H$. 有时候 H 也用正切表示: $\cos^{-1}(x) = 90° - \tan^{-1}\left(x / \sqrt{1 - x^2}\right)$. 但式(12)不仅更加直观, 也更易于在硬件上实现.

从图 2(a) 得点 P 处的饱和度

$$S = \frac{|WP|}{|WP'|} = \frac{|WQ|}{|WT|} = \frac{|WT| - |QT|}{|WT|} , \tag{13}$$

其中点 T(见图 2(b)) 为点 W 在 rg 平面上的投影, 直线 WT 平行于 b 轴. 令点 Q 为点 P 在 WT 上的投影, PQ 平行于 rg 平面; 第二个等号后面一项根据 $\triangle PWQ \cong \triangle P'WT$ 得到. 由于 $|WT| = 1/3$, $|QT| = b$, 则

$$\begin{aligned}S &= 3\left(\frac{1}{3} - b\right) \\ &= 1 - 3b \\ &= 1 - b_0 ,\end{aligned} \tag{14}$$

其中最后一步根据式(4)和条件(e)得到. 在 RG 扇区中, 记 $b_0 = \min\{r_0, b_0, g_0\}$. 类似地,

$$
\begin{aligned}
S &= 1 - \min\{r_0, g_0, b_0\} \\
&= 1 - \frac{3}{R+G+B}\min\{R, G, B\}
\end{aligned} \tag{15}
$$

对于位于 HSI 三角形中的任意一点都是成立的.

综上可得

$$
\begin{cases}
H = \cos^{-1}\left\{ \dfrac{\frac{1}{2}[(R-G)+(R-B)]}{\left[(R-G)^2+(R-B)(G-B)\right]^{1/2}} \right\}, \\
S = 1 - \dfrac{3}{R+G+B}\min\{R, G, B\}, \\
I = \dfrac{1}{3}(R+G+B),
\end{cases} \tag{16}
$$

当 $(B/I) > (G/I)$ 时, 令 $H = 360^\circ - H$. 如果 $S = 0$, 则 $|WP| = 0$, 意味着 W 和 P 重合, 此时 H 的定义没有意义, 所以色度在饱和度为 0 的时候没有定义. 类似地, 饱和度在强度 $I = 0$ 时没有定义.

2 从 HSI 到 RGB 的转换

i. 对于 RG 扇区 ($0^\circ < H \leqslant 120^\circ$), 由于

$$
\begin{aligned}
S &= 1 - \frac{3}{R+G+B}\min\{R, G, B\} \\
&= 1 - \min\{r_0, g_0, b_0\} \\
&= 1 - b_0 \quad \left(RG\text{扇区中}b_0 = \min\{r_0, g_0, b_0\}\right) \\
&= 1 - 3b,
\end{aligned} \tag{17}
$$

故

$$
b = \frac{1}{3}(1-S). \tag{18}
$$

由图 3(b) 可知 r 值为点 P 在红原色轴上的投影. 图 3(c) 中的 $\triangle P_R O Q_R$ 与图 3(a) 中的 $\triangle P_R O Q_R$ 相对应. 直线 OP_R 对应红原色轴, 虚线 TX 是 $\triangle P_R O Q_R$ 所在平面与包含点 p 且与 Or 轴相垂直的平面 $T'XP''$(记为平面 Ω, 如图 3(a) 中的灰色区域所示) 的交线.

易得平面 $\Omega //$ 平面 bOg, 又平面 $\Omega \cap$ 平面 $P_R P_G P_B = PT$, 平面 $bOg \cap$ 平面 $P_R P_G P_B = P_B P_G$, 故 $PT // P_B P_G$. 因为 $OP_B = OP_G$, Q_R 为 $P_B P_G$ 的中点, 所以 $OQ_R \perp P_B P_G$; 同理得, $P_R Q_R \perp P_B P_G$. 又 $OQ_R \subset$ 平面 $P_R O Q_R$, $P_R Q_R \subset$ 平面 $P_R O Q_R$, 则 $P_B P_G \perp$ 平面 $P_R O Q_R$. 由于 $PT // P_B P_G$, 故 $PT \perp$ 平面 $P_R O Q_R$, 所以 $PT \perp P_R Q_R$, 则点 T 为点 P 在直线 $P_R Q_R$ 上的投影, 且

$$
|TW| = |WP|\cos H; \tag{19}
$$

易得 $\triangle P_R X T \cong \triangle P_R O Q_R$, 则

$$
\frac{|P_R Q_R|}{|P_R O|} = \frac{a}{d}, \tag{20}
$$

又 $|P_R O| = 1$, $d = 1 - r$, $a = |P_R Q_R| - |WP|\cos H - |WQ_R|$, 代入式(20)中得

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{|WQ_R|}{|P_R Q_R|} + \frac{|WP|}{|P_R Q_R|}\cos H \\
&= \frac{1}{3} + \frac{|WP|}{|P_R Q_R|}\cos H \quad \left(\text{由条件(g)得}\,|P_R Q_R| = 3\,|WQ_R|\right).
\end{aligned} \tag{21}
$$

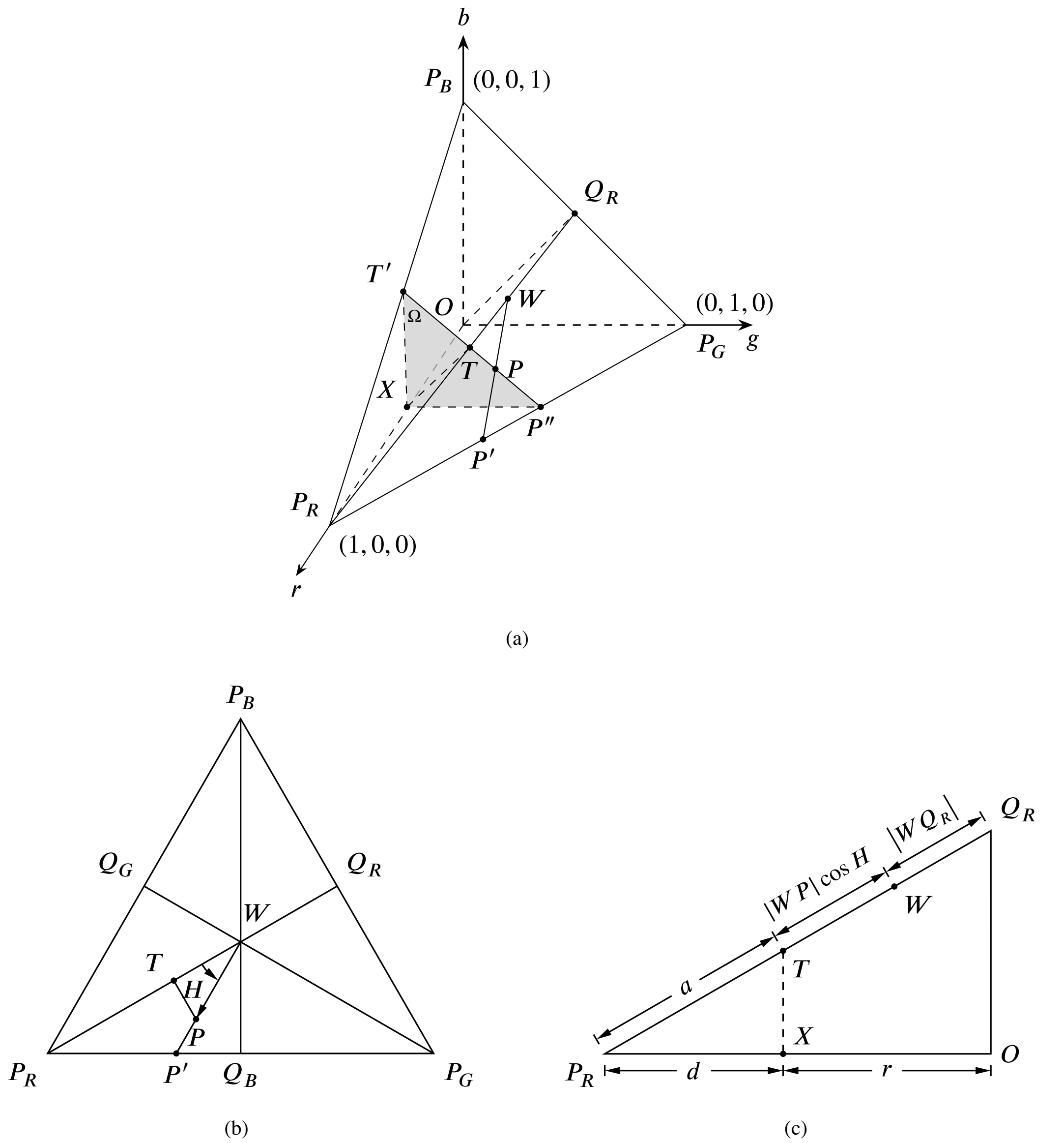


图 3　HSI 颜色空间与 RGB 颜色空间的几何关系

在图 3(a) 中, 有

$$S = \frac{|WP|}{|WP'|}, \tag{22}$$

故 $|WP| = S\left|WP'\right|$. 在图 3(b) 中, 易得 $\angle P_RWQ_B = 60^\circ$, 则 $\angle P'WQ_B = \angle P_RWQ_B - H = 60^\circ - H$, 故

$$\left|WQ_B\right| = \left|WP'\right| \cos(60^\circ - H), \tag{23}$$

又有 $\left|WQ_B\right| = \left|WQ_R\right|$, 代入式(23)中得

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{3} + \frac{S\left|WQ_R\right| \cos H}{P_RQ_R \mid \cos(60^\circ - H)} \\ &= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{S\cos H}{\cos(60^\circ - H)}\right] \quad \left(\text{由条件(g)得 } \left|P_RQ_R\right| = 3\left|WQ_R\right|\right). \end{aligned} \tag{24}$$

已知 r, b, 则

$$g = 1 - r - b. \tag{25}$$

综上, 对于 RG 扇区 ($0^\circ < H \leqslant 120^\circ$), 从 HSI 到 RGB 的变换为

$$\begin{cases} b = \dfrac{1}{3}(1-S)\,, \\ r = \dfrac{1}{3}\left[1 + \dfrac{S\cos H}{\cos(60^\circ - H)}\right]\,, \\ g = 1 - r - b\,, \end{cases} \tag{26}$$

代入 $I = (R+G+B)/3$, 得

$$\begin{cases} B = I(1-S)\,, \\ R = I\left[1 + \dfrac{S\cos H}{\cos(60^\circ - H)}\right]\,, \\ G = 3I - R - B\,. \end{cases} \tag{27}$$

ii. 对于 GB 扇区 ($120^\circ < H \leqslant 240^\circ$), 由中心对称关系, 对式(27)做变量替换即可 (如图 4 所示). 令 $H = H - 120^\circ$, 且

$$R \to G\,, \qquad G \to B\,, \qquad B \to R\,,$$

得

$$\begin{cases} R = I(1-S)\,, \\ G = I\left[1 + \dfrac{S\cos(H-120^\circ)}{\cos(180^\circ - H)}\right]\,, \\ B = 3I - R - G\,. \end{cases} \tag{28}$$

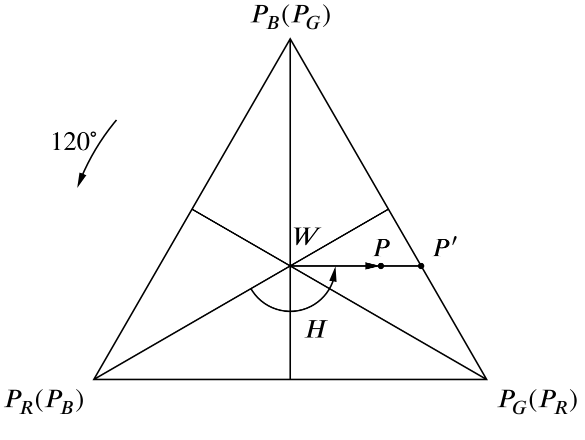


图 4　RG 扇区到 GB 扇区的变换, 相当于在图 3(b) 的基础上绕点 W 逆时针旋转 120°

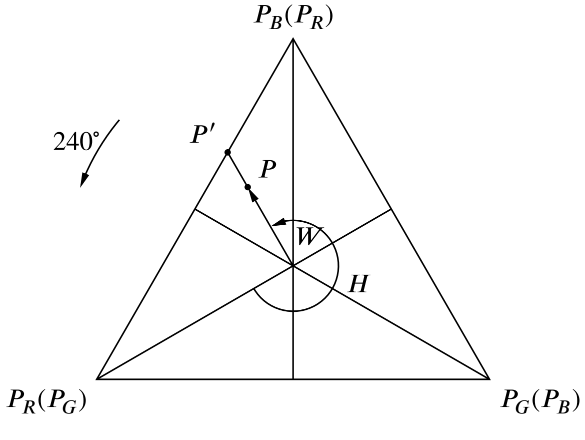


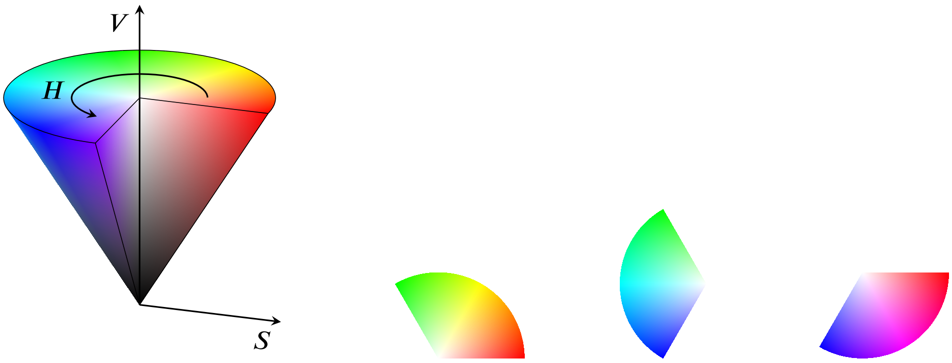
图 5　RG 扇区到 GR 扇区的变换, 相当于在图 3(b) 的基础上绕点 W 逆时针旋转 240°

iii. 对于 BR 扇区 ($240^\circ < H \leqslant 360^\circ$), 同理作变量替换 (如图 5 所示). 令 $H = H - 240^\circ$, 且

$$R \to B\,, \qquad G \to B\,, \qquad B \to G\,,$$

得

$$\begin{cases} G = I(1-S)\,, \\ B = I\left[1 + \dfrac{S\cos(H-240^\circ)}{\cos(300^\circ - H)}\right]\,, \\ R = 3I - G - B\,. \end{cases} \tag{29}$$



(a) HSI 颜色空间　(b) RG 扇区　(c) GB 扇区　(d) BR 扇区

图 6　HSI 颜色模型与各扇区对应的色盘

综上所述, 从 HSI 到 RGB 的变换为

$$
\begin{cases}
0^\circ < H \leqslant 120^\circ, \\
B = I(1-S), \\
R = I\left[1 + \dfrac{S\cos H}{\cos(60^\circ - H)}\right], \\
G = 3I - R - B.
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
120^\circ < H \leqslant 240^\circ, \\
R = I(1-S), \\
G = I\left[1 + \dfrac{S\cos(H - 120^\circ)}{\cos(180^\circ - H)}\right], \\
B = 3I - R - G.
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
240^\circ < H \leqslant 360^\circ, \\
G = I(1-S), \\
B = I\left[1 + \dfrac{S\cos(H - 240^\circ)}{\cos(300^\circ - H)}\right], \\
R = 3I - G - B.
\end{cases}
$$

HSI 颜色模型与各扇区对应的色盘如图 6 所示.